Exercice 1: Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, dire si elles sont majorées, minorées, bornées ou rien.

1. $f : x \mapsto \sin(x)\mathbf{e}^x$
2. $g : x \mapsto \dfrac{3\cos(x) + 2\sin(x)}{1 + \mathbf{e}^x}$

Exercice 2: Pour chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$.

1. $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
2. $f : x \mapsto x^2 - 2$ et $g : x \mapsto \ln(x)$

Exercice 3: Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x-2}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est une bijection entre deux ensembles à préciser.
3. Calculer $f \circ f$ et en déduire sa bijection réciproque.
   On dit que f est une involution. En connaissez vous d'autres ?

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5:

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. En déduire les couples d'entiers (a, b) tels que $a^b = b^a$ et $2 \leq a < b$.
3. Comparer $\mathbf{e}^\pi$ et $\pi^{\mathbf{e}}$.

Exercice 6: Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_\lambda : x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$.

1. Montrer que toutes les tangentes au point d'abscisse $x = 0$ aux fonctions f_λ sont parallèles.
2. Observer que toutes les tangentes au point d'abscisse $x = 1$ sont concourantes.

Exercice 7: Après avoir donné leur ensemble de définition et justifié leur dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \ln(2 + \cos(x))$
2. $g : x \mapsto \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$
3. $h : x \mapsto \sqrt{1 + \ln(1-x)}$
4. $l : x \mapsto \ln\big(\ln(x)\big)$

Exercice 8: On veut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1} < \dfrac{1}{2}$.

1. Étudier la fonction $\phi : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{2x} - \ln(x)$.
2. En déduire l'inégalité demandée.

Exercice 9:

1. Étudier une éventuelle branche infinie de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^3 + x - 1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la position de la courbe représentative de g par rapport à l'asymptote.

Exercice 10: On pose $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
Montrer que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et déterminer ses dérivées successives.

Exercice 11: Tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2-4}$.
On fera une étude complète : limites, asymptotes, ...

Exercice 12: Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f : (x, y) \mapsto \mathbf{e}^x \cos(y)$.
2. $g : (t, u) \mapsto (t^2 + u^2) \cos(tu)$.
3. $h : (R, V) \mapsto \sqrt{1 + R^2V^2}$.

Exercice 13: On pose $f : x \mapsto \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1. Tracer le graphe de f sur $]0, +\infty[$.
   Dans la suite, on admet que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque g, définie sur un intervalle que l'on précisera.
3. Sans expliciter g, montrer que g est dérivable sur son domaine de définition et calculer $g'(1)$.
4. Calculer explicitement $g(y)$ pour tout y dans le domaine de définition de g.
5. Tracer le graphe de g sur son ensemble de définition.

Exercice 14: On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto x\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

1. Donner son ensemble de définition.
2. Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer sa dérivée.
3. Montrer que, pour tout réel x,
   $$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = \left(x^2 - (1 - \sqrt{5})x + 1\right)\left(x^2 - (1 + \sqrt{5})x + 1\right).$$
   et en déduire le tableau de variation de f
4. Étudier les éventuelles asymptotes.
5. Tracer le graphe de la fonction f ainsi que les éventuelles asymptotes.